

LA PROPORTIONNALITE AU CYCLE 3

Objectifs ciblés :

- (Re)découvrir la notion de proportionnalité
- Mettre en évidence des critères de pertinence pour l'enseignement de la proportionnalité au cycle 3 : types de problèmes, procédures de résolution
- Construire des progressions cohérentes au sein du cycle

LA PROPORTIONNALITE AU CYCLE 3

ORGANISATION GENERALE		
DEROULEMENT	ORGANISATION	
1 ^{ère} phase de recherche : Emergence des représentations : « Qu'est-ce qu'une situation de proportionnalité ? Qu'est-ce que la proportionnalité » ?	Réflexion individuelle par écrit. 10mn	8h00 8h10
<u>Recherche d'une définition commune</u>	En petits groupes 10mn	8h20
<u>Mise en commun</u> : transcription au tableau des différentes définitions + apports de l'animateur : Définition 1 : Deux grandeurs sont proportionnelles si leur rapport est constant.	En grand groupe 25mn	8h45
2 ^{ème} phase de recherche : à partir de la 1 ^{ère} définition, distinguer une situation de proportionnalité et de non proportionnalité	En petits groupes 15mn	9h00
<u>Mise en commun</u> : Définition 2 : Deux grandeurs proportionnelles sont des grandeurs telles que : si l'on multiplie (ou divise) l'une d'elles par un nombre, la grandeur correspondante est multipliée (ou divisée) par le même nombre.	En grand groupe 25mn	9h25
PAUSE (15 mn)		
3 ^{ème} phase de recherche : Trouver une classification ou des critères de classification de problèmes proposés au cycle 3	En petits groupes 15mn	9h55
<u>Mise en commun</u> : Classification des situations problèmes selon la typologie de G. VERGNAUD : - la multiplication - la division-partition - la division-quotition - la 4^{ème} proportionnelle Un tableau sera complété collectivement avec l'aide de l'animateur.	En grand groupe 20mn	10h15
4 ^{ème} phase de recherche : Analyser des erreurs d'élèves à partir des résultats aux évaluations 6 ^{ème} ; anticiper les difficultés des élèves à partir du protocole de l'évaluation CM2.	En petits groupes 15mn	10h30
<u>Mise en commun</u> : - Facteurs de difficultés d'un problème (structure mathématique, valeurs numériques impliquées). - + ou – grande familiarité de l'énoncé, ordre de présentation des informations.	En grand groupe 20mn	10h50
5 ^{ème} phase de recherche :		

Compléter un tableau de progressions intra-cycle Périodes → Objectifs → Activités	En petits groupes 15mn	11h05
Synthèse : - Rappel des instructions officielles pour le cycle 3 et le collège - Les apprentissages en lien avec la proportionnalité : connaissance des nombres (entiers, décimaux), les problèmes relevant de la typologie de Vergnaud, les procédures de résolution de problèmes.	En grand groupe 25 mn	11h30

A - 1^{ère} phase de recherche :

**ÉMERGENCE DES REPRESENTATIONS : QU'EST-CE QU'UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE ?
QU'EST-CE QUE LA PROPORTIONNALITE ?**

I) Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

- 1- La taille d'une personne varie proportionnellement à son poids.
- 2- Pour l'essence, le prix à payer est proportionnel à la quantité achetée.
- 3- 12 est proportionnel à 4.
- 4- 13 est proportionnel à 7.
- 5- Le périmètre d'un cercle est proportionnel au rayon.
- 6- L'aire d'un cercle est proportionnelle au rayon.
- 7- L'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse suspendue.
- 8- Pour les rectangles de longueur constante, la largeur est proportionnelle à l'aire.
- 9- Pour les rectangles de périmètre constant, la longueur est proportionnelle à la largeur.
- 10- Pour les rectangles d'aire constante, la longueur est proportionnelle à la largeur.
- 11- Pour le gaz de ville, le tarif est proportionnel à la consommation.
- 12- Pour la déclaration de revenus, le montant de l'impôt est proportionnel au revenu.
- 13- Pour un parcours (d'une durée donnée), la vitesse moyenne est proportionnelle à la distance.

II) Pouvez-vous nous donner une définition de la proportionnalité ?

Réponses aux questions

- | | |
|------------------------------|----------|
| 1- Faux | 8- Vrai |
| 2- Vrai | 9- Faux |
| 3- Faux. Ils sont multiples. | 10- Faux |
| 4- Faux | 11- Faux |
| 5- Vrai | 12- Faux |
| 6- Faux | 13- Vrai |
| 7- Vrai | |

Réactions possibles des stagiaires :

Difficultés pour les questions n°8, 9 (procédure additive) et 10 (propriétés des quadrilatères).

Les procédures choisies peuvent être différentes.

APPORT/DEFINITION 1 :

Deux grandeurs sont proportionnelles si leur rapport est constant.

B - 2^{ème} phase de recherche :

FAIRE VIVRE UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE ET DE NON PROPORTIONNALITE

LES RECTANGLES :

Identification d'une situation de proportionnalité ou non par des activités de comparaison entre plusieurs figures géométriques. (variables introduites : agrandissement/réduction)

Cf. annexe

Organisation de la recherche

Distribution d'une feuille représentant 4 séries de rectangle. La dernière série est particulière puisqu'il s'agit de pavés droits.

Consigne : «Quels sont les rectangles qui peuvent être considérés comme des agrandissements ou des réductions les uns des autres ? Classez-les selon ce critère. Vous avez le droit de mesurer mais vous n'êtes pas obligés. »

Réactions possibles des stagiaires :

- recherche d'un coefficient directeur (un rapport)
- tracé et utilisation des diagonales
- comparaison par superposition des diagonales
- comparaison à l'allure générale, la longueur et la largeur

APPORT/DEFINITION 2 :

Deux grandeurs proportionnelles sont des grandeurs telles que : si l'on multiplie (ou divise) l'une d'elles par un nombre, la grandeur correspondante est multipliée (ou divisée) par *le même* nombre.

C - 3^{ème} phase de recherche :

TRI D'EXERCICES : DEFINIR DES CRITERES PERTINENTS.

Voici différents problèmes ; trouvez une classification ou des critères de classification de ces problèmes :

- 1) J'ai collé 32 timbres sur chaque page d'un album de 14 pages. Combien y a-t-il de timbres dans l'album ?
- 2) Dans une bande de 96 cm j'ai découpé des rubans de 12 cm. Combien de rubans ai-je découpé ?
- 3) Avec 354 bonbons je veux faire 12 paquets identiques. Combien de bonbons dois-je mettre dans chaque paquet ?
- 4) Pour faire une expérience de chimie, un professeur verse 6dl d'eau et 15 g de sucre dans un récipient. Il donne ensuite à ses élève un récipient contenant de l'eau. Dans celui de Jacques il y a 8 dl d'eau, dans celui de Pierre il y a 18 dl, dans celui de Benoît il y a 30 dl, dans celui d'Isabelle il y a 15 dl d'eau et dans celui de Laurence il y a 12 dl. Quelle quantité de sucre doit mettre chaque élève dans son récipient afin d'avoir une eau aussi sucrée que celle du professeur ?
- 5) Un appareil coûte 7 500 francs en décembre. Son prix augmente de 20 % en janvier. Combien coûte-t-il alors ?
- 6) Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 j'ai avancé de 12 bonds de longueur 16. Quelle est la position d'arrivée ?
- 7) J'ai collé 448 timbres dans un album. Il y a 14 timbres sur chaque page. Combien de pages ont été remplies ?
- 8) On a acheté 7,20 m de fil électrique à 400 francs le mètre, combien a-t-on payé ?
- 9) Je déplace un pion sur une piste graduée, par bonds réguliers. En partant de 0 et en 12 bonds, le pion arrive à la position 192. Quelle est la valeur de chaque bond ?
- 10) On sait que pour 1000 g de poisson (tazar) on paye 1600 francs. Combien payera-t-on pour 3000 g ? Pour 1500 g ? Pour 500 g ? Pour 2500 g ? Pour 1040 g ?
- 11) Mr X a consommé 32 litres pour parcourir 400 km. Combien de litres utilise son auto pour parcourir 1 km ?
- 12) déplace un pion sur une piste graduée, en partant de 0, par bonds réguliers de longueur 12 . Je suis arrivé à la position 192. En combien de bonds ?
- 13) Pierre a acheté 2 cahiers pour 400 francs, Jean en a acheté 4 pour 1000 francs.
 - a. Leur camarade Michel pense qu'ils ne les ont pas achetés au même endroit. Explique pourquoi.

- b. Pierre doit retourner dans le même magasin pour en acheter 6 autres, combien va-t-il payer ?

14) Une dose de caramel mesure 0,25 dl. J'ai besoin de 5 doses pour napper mon gâteau. Quelle est la quantité de caramel dont je vais avoir besoin ?

Commentaires :

Dans les classements proposés, il peut y avoir confusion entre problèmes de proportionnalité/problèmes multiplicatifs/problèmes de division.

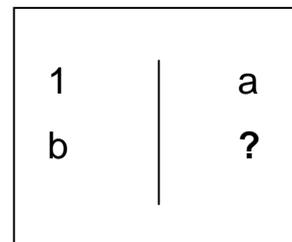
Influence de l'exposé sur le champ additif (modèle ternaire), soit sur le type de problème (distinctions entre des problèmes de multiplication/division et des problèmes de proportionnalité).

APPORT/DEFINITION 3 :

LA TYPOLOGIE DE G. VERGNAUD

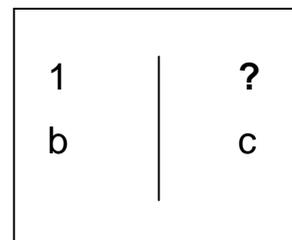
1 – LA MULTIPLICATION

*ex. : J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet.
Combien ai-je de yaourts ?*



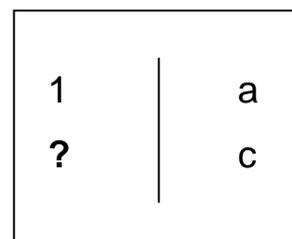
2 – LA DIVISION-PARTITION

(recherche de la valeur d'une part)
ex. : J'ai payé 40 francs pour 3 bouteilles de vin. Quel est le prix d'une bouteille ?



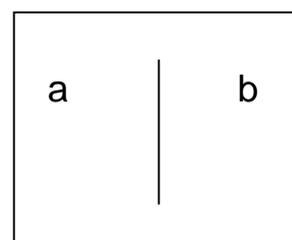
3 – LA DIVISION-QUOTITION

(recherche du nombre de parts)
*ex. : Pierre a 24 francs et veut acheter des paquets de bonbons à 6 francs le paquet.
Combien de paquets peut-il acheter ?*



4 – LA 4^{EME} PROPORTIONNELLE

(proportion simple sans présence de l'unité)



ex. : 3 pelotes de laine pèsent 200 g. Il en faut 8 pour faire un pull. Combien pèse le pull ?

Remarque : Les autres types de proportionnalité pourront faire l'objet de recherches personnelles en consultant ERMEL (CE2, CM1, CM2).

Classement des problèmes selon la typologie des problèmes multiplicatifs de Vergnaud :

- **Problèmes de type multiplicatif :** (on connaît la valeur de l, et on cherche pour plusieurs).

Problème 1 : $\begin{matrix} 1 & 32 \\ 14 & ? \end{matrix}$ Problème 6 : $\begin{matrix} 1 & 16 \\ 12 & ? \end{matrix}$

Problème 8 : $\begin{matrix} 1 & 4 \\ 7,20 & ? \end{matrix}$ Problème 14 : $\begin{matrix} 1 & 0,25 \\ 5 & ? \end{matrix}$

- **Problèmes de type « division partition » :** (on cherche la valeur d'une part).

Problème 3 : $\begin{matrix} 1 & ? \\ 12 & 354 \end{matrix}$ Problème 9 : $\begin{matrix} 1 & ? \\ 12 & 192 \end{matrix}$

Problème 11 : $\begin{matrix} 1 & ? \\ 400 & 32 \end{matrix}$

- **Problèmes de type « division quotient » :** (on cherche le nombre de part).

Problème 7 : $\begin{matrix} 1 & 14 \\ ? & 448 \end{matrix}$ Problème 2 : $\begin{matrix} 1 & 12 \\ ? & 96 \end{matrix}$

Problème 12 : $\begin{matrix} 1 & 12 \\ ? & 192 \end{matrix}$

- **Problème de recherche d'une 4^{ème} proportionnelle :**

Problème 4 : $\begin{matrix} 6 & 15 \\ 8 & ? \end{matrix}$ $\begin{matrix} 6 & 15 \\ 18 & ? \end{matrix}$ $\begin{matrix} 6 & 15 \\ 30 & ? \end{matrix}$

Problème 5 : $\begin{matrix} 100 & 20 \\ 750 & ? \end{matrix}$ Problème 10 : $\begin{matrix} 1000 & 16 \\ 1040 & ? \end{matrix}$

Problème 13 : $\begin{matrix} 2 & 4 \\ 6 & ? \end{matrix}$

D - 4^{ème} phase de recherche :

Consignes : Identifier l'(les) erreur(s)
Analyser leur(s) origine(s)
Proposer des pistes de remédiation ainsi que des situations pour éviter la reproduction de ces erreurs

Exercice 16 :

30 savonnettes parfumées au coco pèsent 240 g.

Dans chaque cas, compléter par le nombre qui convient :

- 60 savonnettes pèsent g.
- 15 savonnettes pèsent g.
- 75 savonnettes pèsent g.
- J'ai mis des savonnettes sur une balance, elle indique 1 200 g.
Il y a savonnettes sur la balance.

<u>Exercice 16</u>	Taux de réussite	Non réponse
item 48	65,3%	4,0%
item 49	51,3%	10,0%
item 50	20,7%	23,3%
item 51	23,3%	42,0%

Exercice 27 :



120 F



75 F

<u>Exercice 27</u>	Taux de réussite	Non réponse	Code 3
item 87	73,3%	8%	5,3%
item 88	70%	4,7%	

Un jus de fruit coûte 120 F et un gâteau 75 F.

Brian possède 500 F.

Peut-il acheter deux jus de fruits et quatre gâteaux ?

Exercice 18 :

Marie a ramassé 70 œufs dans le poulailler.

Elle les place dans des boîtes de 12.

Combien de boîtes faut-il pour ranger tous les œufs ?

<u>Exercice 18</u>	Taux de réussite	Non réponse	Code 6
item 54	46,6%	21,3%	
item 55	17,3%	28%	14%

Exercice 34 :

Pour faire une salade de cerf pour 6 personnes il faut :

- 600 g de cerf
- 12 cL de soyo (sauce soja)
- 4 oignons verts
- 1 citron
- Calculer la quantité de chacun des ingrédients nécessaires pour faire une salade de cerf pour

<u>Exercice 34</u>	Taux de réussite	Non réponse
item 104	35,3%	5,3%

18 personnes (les calculs peuvent être faits dans le cadre) :

EXTRAIT DE L'EVALUATION A L'ENTREE EN 6EME 2010 (COLLEGE DE KOUTIO)

APPORTS 4 :

1) FACTEURS DE DIFFICULTE D'UN PROBLEME/ ANALYSE D'ERREURS

SA STRUCTURE MATHEMATIQUE :

S'agit-il d'un problème de multiplication, de division, de la recherche d'une quatrième proportionnelle ?

LES VALEURS NUMERIQUES IMPLIQUEES :

Nombres petits ou grands, entiers ou décimaux, supérieurs ou inférieurs à 1 :

petits nombres

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 5 & ? \end{array}$$

grands nombres (ex. n°3)

$$\begin{array}{c|c} 1 & 17 \\ 23 & ? \end{array}$$

nombres décimaux (ex. n°8)

$$\begin{array}{c|c} 1 & 7,5 \\ 5 & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 17 \\ 2,5 & ? \end{array}$$

valeur unitaire < 1

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0,25 \\ 5 & ? \end{array}$$

(ex. n°14)

nombre d'unités < 1

$$\begin{array}{c|c} 1 & 17 \\ 0,7 & ? \end{array}$$

2) LA + OU - GRANDE FAMILIARITE DE L'ENONCE, OU L'ORDRE DE PRESENTATION DES INFORMATIONS :

Exemples :

- 3 friandises coûtent 150 francs,
combien coûtent 72 friandises ?

bien réussi

- 15 friandises coûtent 720 francs,
combien coûtent 3 friandises ?

*nettement plus
difficile*

5 friandises coûtent 30 francs,
combien coûtent 72 friandises ?

*moins de 50 %
de réussites*

- Problème où il faut multiplier
0,6 kg par 38 doses (0,6 x 38) *80 % de réussite*

Problème où il faut multiplier
380 francs par 0,6 kg (38 x 0,6) *48 % de réussite*

- On a acheté 7,20 m de fil électrique à
400 le mètre, combien a-t-on payé ? *66 %
de réussite*

E - 5^{ème} phase de recherche : IMPLICATIONS PEDAGOGIQUES

Consigne : Compléter les progressions en illustrant l'objectif d'une période donnée par une situation d'apprentissage.

Organisation : Travaux par groupe de niveau

Remarques : les groupes CM1 et CM2 auront à effectuer cette recherche selon 2 possibilités.

- Le « chapeau » de la séquence est donnée ; il faut imaginer le contenu des séances
- Situation inverse.

Les situations d'apprentissage proposées sont extraites des ouvrages ERMEL.

PROGRESSION AU CE2

L'approche de la proportionnalité se fait à travers l'étude de problèmes multiplicatifs. Les propriétés de linéarité de la proportionnalité sont utilisées implicitement dans le cas de proportionnalité simple où, dans la plupart des cas, l'image de 1 est connue.

Exemple :

« 1 stylo coûte 60 francs. Combien coûtent 5 stylos ? »

2 stylos coûtent $2 \times 60 = 120$ F, 4 stylos $2 \times 120 = 240$ F
et 5 stylos $240 + 60 = 300$ F

PROGRESSION AU CM1*

Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Utiliser des rapports internes entre les nombres pour compléter une graduation GRADUATIONS p.265 (3 séances)	Utiliser des procédures relevant de la linéarité dans une situation « matérielle » BANDES COLOREES p.270 (3 séances)	Utiliser des procédures relevant de la linéarité dans un contexte quantité/prix LE PRIX DU FROMAGE p.280 (2 séances) LES PAINS p.283	Utiliser un rapport (coefficient) entre deux grandeurs RECETTES p.286	Rencontrer la proportionnalité dans une situation de comparaison (proportions) SIROP p.289

Les élèves sont confrontés à des situations qui, pour leur traitement, ne nécessitent que l'utilisation de rapports entiers (exprimables par « n fois plus » ou « n fois moins ») ou rapports fractionnaires simples (du type « moitié de » ou « quart de »,...)

Exemple :

« 3 stylos coûtent 60 francs. Combien coûtent 15 stylos ? »

PROGRESSION AU CM2*

Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Linéarité et coefficient de proportionnalité RECETTES p.287	Proportionnalité et non-proportionnalité VERRES GRADUES p.295 (2 séances)	Linéarité et recours à l'unité CHANGE p.303 (2 séances)	Coefficient de proportionnalité L' EURO p.324 PETITS PROBLEMES DE PROPORTIONNALITE p.328	PETITS PROBLEMES DE PROPORTIONNALITE p.336
Construction d'un graphique dans un système d'axes déjà gradués PROFIL DE LA LOIRE p.291		Coefficient de proportionnalité AGRANDISSEMENT D'UN PUZZLE p.310 (2 séances)	Introduction aux pourcentages SOLDES p.329	Echelle CARTES p.337 (2 séances)
		Lecture de tableau et graphique TRAINS 1 p.317	Utilisation de la proportionnalité pour la construction de représentations PILES DE LIVRES p.333	Construction de graphiques, lecture de données DISTANCE D'ARRET p.345
		Utilisation d'une graduation régulière TRAINS 2 p.321		Proportionnalité et non-proportionnalité : pourcentages PRIX REDUITS p.349

*** Les références des séances (titre, pages) sont issues des manuels ERMEL indiqués en bibliographie**

Remarques : Les problèmes de proportionnalité sont résolus à l'aide de procédures personnelles, basées sur des raisonnements dans le contexte évoqué...C'est au collège que seront mises en place des procédures plus générales, des procédures expertes.

Ces procédures personnelles utilisent, « en acte » :

- essentiellement les propriétés de linéarité
- la reconnaissance d'un coefficient de proportionnalité
- le passage par l'unité pour traiter des situations plus difficiles

EXTRAITS DES PROGRAMMES DE 2005

AU CYCLE 3

Problèmes relevant des quatre opérations

- Résoudre des problèmes en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées.

Proportionnalité

- Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité, en utilisant des raisonnements personnels appropriés (dont des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unités).

Commentaires

L'étude de la proportionnalité pour elle-même relève du collège. A l'école primaire, il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif. Ces problèmes sont traités en s'appuyant sur des raisonnements qui peuvent être élaborés et énoncés par les élèves dans le contexte de la situation.

Il est important que soient proposées aussi bien des situations qui relèvent de la proportionnalité que des situations qui n'en relèvent pas.

Dans tous les cas, on s'appuiera sur des situations concrètes

(des expériences en lien avec le programme de sciences, de géographie...)

L'utilisation de tableaux de nombres ou de graphiques permet d'organiser des informations dans de nombreuses situations. Ces outils ne doivent pas être associés systématiquement à la proportionnalité.

Il est important de confronter les élèves à des situations de proportionnalité qui, pour leur traitement, nécessitent l'utilisation de rapports fractionnaires (du type « moitié de », « quart de »,...) et pas seulement de rapports entiers.

La construction des connaissances sur la proportionnalité et la construction des nombres (en particulier rationnels et décimaux) sont intimement liées.

Conseil pratique

On peut toujours transformer un énoncé sur les vitesses, les échelles, les pourcentages, en explicitant l'isomorphisme des deux grandeurs : on dira par exemple aux enfants que 1 cm sur la carte représente 10 km sur le terrain plutôt que de parler d'une échelle 1 : 1 000 000. On se ramène ainsi à l'étude du premier cas de proportionnalité.

AU COLLEGE (A TITRE INDICATIF) :

6^{ème} : - résolution de problèmes relevant du domaine de la proportionnalité en enrichissant les procédures (utilisation de quotients de nombres)
- calculs de pourcentages et d'échelles

5^{ème} : - les suites de nombres proportionnelles
- reconnaître la proportionnalité sur un tableau complet de nombres
- déterminer une quatrième proportionnelle
- calculer un coefficient de proportionnalité
- calculs de pourcentages et d'échelles

- préparation de la notion de vitesse

4^{ème} : - caractérisation graphique de la proportionnalité « sous la forme d'alignements de points avec l'origine »

- étude de la notion de vitesse

3^{ème} : - concept de fonction linéaire comme permettant de modéliser toute situation de proportionnalité

EVALUATION FINALE DE L'INTERVENTION

Quels sont le ou les points qui vous ont apporté le plus ? **(précisez en expliquant pourquoi)**

Commentaire des stagiaires sur :

- *la typologie de Vergnaud*
- *la progression*
- *les rectangles*
- *les types de procédures*
- *les mises en situation*

Bibliographie :

- ERMEL Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, CM1, CM2, Hatier 1997
- COPIRELEM, Carnets de route (Concertum)
- Les programmes pour l'école primaire (NC)
- Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques aux Cycle 3 (DENC)
- Le socle commun de connaissances et de compétences (à titre indicatif)